

Control 3

P1. a) (4,0 ptos.) Demuestre usando inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1).$$

b) (2,0 ptos.) Demuestre usando inducción que

$$\forall n \geq 1, \quad 3^n + 4^n - 1 \text{ es divisible por } 3.$$

P2. Se considera en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación \mathcal{R} por:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - c = 2m \wedge b - d = 3n.$$

- (i) (3,0 ptos.) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- (ii) (3,0 ptos.) Encuentre el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}$.

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15